Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 5 Septiembre 2016

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula "m" y el valor del límite.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula "m" y el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{m}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x - m\cdot(e^x-1)}{(e^x-1)\cdot 2x} = \left\{\frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0}; L'H\right\} =$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2 - m\cdot e^x}{e^x\cdot 2x + (e^x-1)\cdot 2} = \frac{2-m}{0+0} = \frac{2-m}{0}.$$

Como me dicen que el límite es finito, **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital puesto que el límite es un número, es decir 2 - m = 0, de donde **m = 2**.
Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con m = 2, tenemos:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cdot e^x}{e^x\cdot 2x + (e^x-1)\cdot 2} = \left\{\frac{2-2}{0+0} = \frac{0}{0}; L'H\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot e^x}{e^x\cdot 2x + e^x\cdot 2 + e^x\cdot 2} = \frac{-2}{0+2+2} = \frac{-1}{2}.$$

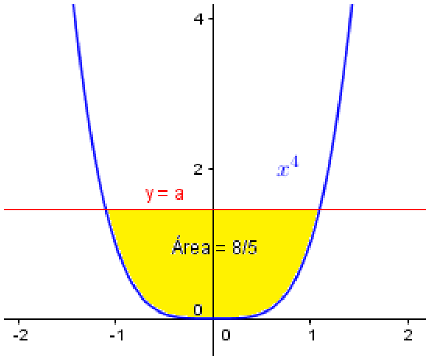
Resumiendo **el valor de m es 2** y **el valor del límite es -1/2**.

Ejercicio 2 opción A, modelo 5 Septiembre 2016

[2'5 puntos] Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de *f* formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.

Solución

La gráfica de $f(x) = x^4$ (es una función par f(-x) = f(x), por tanto simétrica respecto al eje OY) es parecida a la de la parábola $f(x) = x^2$, pero un poco más cerrada.
$f(x) = x^4 \geq 0$, siempre, pasa por (0,0), (-1,1), (1,1), (-2,16), (2,16), …
Una recta horizontal es de la forma y = a, que es paralela al eje OX.
Un esbozo de las gráficas es



Observamos que el recinto es simétrico respecto al eje OY, luego podemos calcular sólo el área para x > 0, y multiplicándolo por 2.

Calculamos los cortes de y = a con la función $f(x) = x^4$, para lo cual lo igualamos:
$a = x^4$, de donde $x^4 = a$ y las soluciones son $x = \pm\sqrt[4]{a}$. Sólo utilizaremos la parte positiva $x = +\sqrt[4]{a}$.

$$\text{Área} = 8/5 = 2.\int_0^{\sqrt[4]{a}}(a - x^4)dx = 2\cdot\left[ax - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[4]{a}} = 2\cdot\left(a\sqrt[4]{a} - \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^5}{5} - 0\right) = 2\cdot\left(\sqrt[4]{a^5} - \frac{\sqrt[4]{a^5}}{5}\right) = 2\left(\frac{4\sqrt[4]{a^5}}{5}\right) = \frac{8\sqrt[4]{a^5}}{5}.$$

Igualando tenemos $\frac{8}{5} = \frac{8\sqrt[4]{a^5}}{5}$, de donde $1 = \sqrt[4]{a^5}$, es decir $a^5 = 1$, por tanto $a = \sqrt[5]{1} = 1$, **es decir la recta pedida es y = 1.**

Ejercicio 3 opción A, modelo 5 Septiembre 2016

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \\ x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$,

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro λ.
b) [0'75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \\ x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$,

a)
Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2\text{-}5F_3 \\ F_2\text{-}5F_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -16 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$, por tener dos filas proporcionales.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0$, tenemos que *rango(A) = 2*, independientemente del valor de λ.

También se puede hacer por Gauss (está preparado)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 5 & -11 & 9 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_2 \text{ por } F_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2\text{-}2F_1 \\ F_3\text{-}5F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3\text{-}2F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, y,

y rango(A) = 2, por tener una matriz escalonada con dos filas con elementos distintos de cero

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1\text{-}2F_3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 0 - 2(10-\lambda) + (-3)\cdot(-15+11) = -20 + 2\lambda + 12 =$

$= 2\lambda - 8$. (*se anula para $\lambda = 4$*)

También se puede hacer por Gauss (está preparado)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_2 \text{ por } F_3 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2\text{-}2F_1 \\ F_3\text{-}5F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & \lambda\text{-}10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3\text{-}2F_2 \end{matrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\text{-}4 \end{pmatrix}$$, y vemos que la última fila de la matriz escalonada se hace cero si $\lambda = 4$

Discusión.
Si $\lambda \neq 4$, rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, y el sistema es incompatible y no tiene solución**
Si $\lambda = 4$, rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, y el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones (más de una solución).**

b)
Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.

Hemos visto en el apartado (a) que, si **λ = 4,** rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, y el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones (más de una solución).**

Como el rango es 2 tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, tomamos la 1ª y la 3ª que son las ecuaciones con los que he formado el menor de orden 2 distinto de cero para determinar el rango de A.

$2x - 4y + 2z = 1$. $F_1 - 2F_2$ $\rightarrow$ $0 + 2y - 8z = -3$ $\rightarrow$ $y = -3/2 + 4z$
$x - 3y + 5z = 2$. $\rightarrow$ $x - 3y + 5z = 2$ $\rightarrow$ $x = 2 + 3y - 5z$. Tomando **z = b** $\in$ R, tenemos
$y = -3/2 + 4b$, y $x = 2 + 3\cdot(-3/2 + 4b) - 5b = -5/2 + 7b$.
Las infinitas soluciones del sistema son **(x,y,z) = (- 5/2 + 7b, -3/2 + 4b, b)** con **b** $\in$ **R**

Ejercicio 4 opción A, modelo 5 Septiembre 2016

Considera el punto A(1,-1,1) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

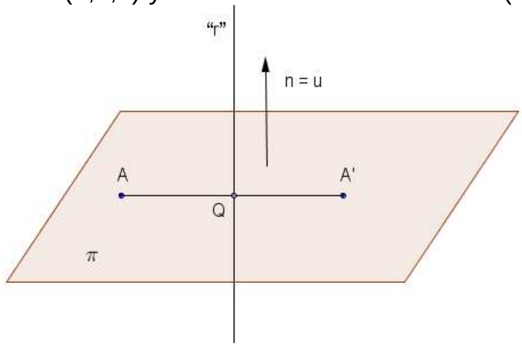
(a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a "r".
(b) [1 punto] Determina la ecuación del plano que contiene a "r" y pasa por A.

Solución

Considera el punto A(1,-1,1) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

(a)
Calcula las coordenadas del punto simétrico de A(1,-1,1) respecto a "r".

De la recta "r", tomamos el punto el B(1,1,1) y el vector de dirección el **u** = (2,-1,0).



Calculamos el plano "π" perpendicular a la recta "r" por el punto A, el vector normal del plano **n** es el vector director de la recta **u** =(2,-1,0).
$\pi \equiv \mathbf{AX} \bullet \mathbf{n} = 0 = (x-1,y+1,z-1) \bullet (2,-1,0) = 2x - y - 3 = 0$.
Calculamos el punto de corte Q del plano "π" con la recta "r", sustituyendo la recta en el plano:
$2(1+2\lambda) - (1-\lambda) - 3 = 0 \rightarrow -2 + 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2/5$.
El punto Q es Q(1 + 2(2/5), 1 - (2/5), 1) = Q(9/5,3/5,1).

El punto A'(x,y,z) se calcula sabiendo que el punto Q es el punto medio del segmento AA'.
(9/5,3/5,1) = ((x+1)/2,(y-1)/2,(z+1)/2), de donde:
$9/5 = (x+1)/2 \rightarrow x = 13/5$.
$3/5 = (y-1)/2 \rightarrow y = 11/5$.
$1 = (z+1)/2 \rightarrow z = 1$.
El simétrico A' de A respecto a la recta "r" es A'(13/5, 11/5, 1).
(b)
Determina la ecuación del plano que contiene a "r" y pasa por A(1,-1,1).

Para un plano necesito un punto, el B (punto de la recta) y dos vectores independientes, el **u** (vector director de la recta) y el **AB**. (También se puede obtener con un punto y un vector normal).

Un punto de "r" es B(1, 1,1) y un vector director es **u** = (2,-1,0).
El vector **BA** es **BA** = (0,-2,-0)

La ecuación del plano en forma vectorial es: $\pi_1 \equiv (1,1,1) + \lambda(2,-1,0) + \mu(0,-2,0)$, con λ y μ números reales.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 5 Septiembre 2016
(Ejercicio 1 opción B, Septiembre Reserva_1 2014)

Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.
a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de *f*.

Solución

Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2e^{-x^2} = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

Asíntotas verticales (A.V.) (la recta x = a es A.V. si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$)

Como no hay números que anulen el denominador, recordamos que la exponencial no se anula nunca, *f* no tiene A.V.

Asíntotas horizontales (A.H.) (la recta y = b es A.H. si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$)

Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^{x^2}}\right) = \left\{\dfrac{+\infty}{+\infty}, \text{ L'Hôpital, L'H}, \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right\} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x}{2xe^{x^2}}\right) =$

$=$ {simplifico} $= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{e^{x^2}}\right) = 1/+\infty = 0^+$, **la recta y = 0 es una A.H en ± ∞**, *y la función f(x) está por encima de la A.H. y = 0.*

Como la función f(x) tiene asíntota horizontal en ± ∞, y no es una función a trozos, **f(x) no tiene asíntotas oblicuas en ± ∞.**

b)
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía. El estudio de la 1ª derivada

$f(x) = x^2e^{-x^2}$.

$f'(x) = 2x\cdot e^{-x^2} + x^2\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = e^{-x^2}\cdot(2x)\cdot(1 - x^2)$

De f '(x) = 0, tenemos $(2x)\cdot(1 - x^2) = 0$, puesto que la exponencial e^{-x^2} nunca se anula.

Las soluciones de $(2x)\cdot(1 - x^2) = 0$, son x = 0, x = 1 y x = - 1, que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(-2) = (+)·(-4)·(-3) = (+)·(12) > 0, *f(x) es estrictamente creciente* (↗) *en (- ∞,-1)*

Como f '(-0'5) =(+)·(-1)·(0'75) =(+)·(-0'75) < 0, *f(x) es estrictamente decreciente* (↘) *en (-1,0)*

Como f '(0'5) =(+)·(1)·(0'75) =(+)·(0'75) > 0, *f(x) es estrictamente creciente* (↗) *en (0,1)*

Como f '(2) = (+)·(4)·(-3) = (+)·(-12) < 0, *f(x) es estrictamente decreciente* (↘) *en (1, +∞)*

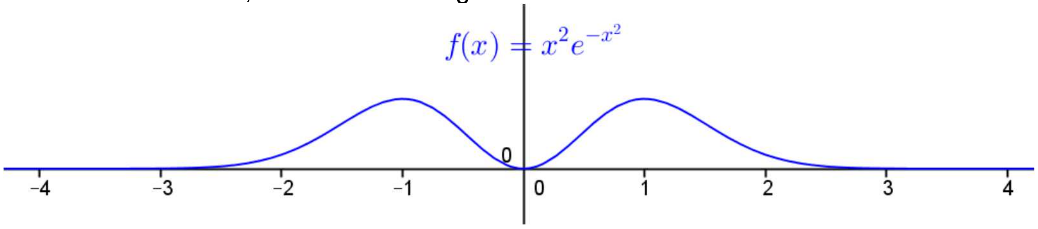
Por definición x = -1 es un máximo relativo que vale $f(-1) = (-1)^2\cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$.

Por definición x = 0 es un mínimo relativo que vale $f(0) = (0)^2\cdot e^{0} = 0$.

Por definición x = 1 es un máximo relativo que vale $f(1) = (1)^2\cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$.

c)
Esboza la gráfica de f.

Teniendo en cuenta lo anterior, de que para x = 0 → f(0) = 0, y de que de f(x) = 0 → $x^2 = 0$, puesto que la exponencial no se anula nunca, un esbozo de la gráfica es



Ejercicio 2 opción B, modelo 5 Septiembre 2016

[2'5 puntos] Calcula $\int \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\cdot dx$ (sugerencia $t = \sqrt{x}$).

Solución

Calcula $I = \int \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\cdot dx$, nos dan el cambio $t = \sqrt{x}$, es decir $t^2 = x$, luego $2t\cdot dt = dx$, y sustituyendo nos queda

$I = \int \dfrac{t^2}{1+t}2tdt = \int \dfrac{2t^3}{1+t}dt$, que es una integral racional. Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador, si hiciese falta.

$$\begin{array}{l|l} 2t^3 & t+1 \\ \hline -2t^3 - 2t^2 & 2t^2 - 2t + 2 \\ \hline \quad -2t^2 & \\ \quad 2t^2 + 2t & \\ \hline \qquad 2t & \\ \qquad -2t - 2 & \\ \hline \qquad\quad -2 & \end{array}$$

Recordamos que $I = \int(\text{Cociente} + \text{Resto} / \text{Divisor})dt = \int (2t^2 - 2t + 2)dt + \int \frac{-2}{1+t}dt =$

$= 2t^3/3 - t^2 + 2t - 2\cdot\ln|t + 1| + K = \{\text{quito el cambio } t = \sqrt{x}\} = \frac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} - x + 2\cdot\sqrt{x} - 2\cdot\ln|\sqrt{x} + 1| + K.$

Ejercicio 3 opción B, modelo 5 Septiembre 2016

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] Calcula el rango de $AB^T + \lambda I$ según los valores de λ (B^T es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3).
(b) [1'5 puntos] Calcula la matriz X que verifica $CX - X = 2I$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a)
Calcula el rango de $AB^T + \lambda I$ según los valores de λ (B^T es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3).

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot(1\ \ 1\ \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

$$AB^T + \lambda I = C + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0+\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det(AB^T + \lambda I) = |AB^T + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 0 - 0 + \lambda\cdot((\lambda+1)\cdot(\lambda-1) + 1) = \lambda\cdot(\lambda^2) = \lambda^3.$$

De $\det(AB^T + \lambda I) = 0$, tenemos $\lambda^3 = 0$, de donde $\lambda = 0$.
Si $\lambda \neq 0$, $\det(AB^T + \lambda I) \neq 0$ y por tanto **rango($AB^T + \lambda I$) = 3.**

Si $\lambda = 0$, $AB^T + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por tanto **rango($AB^T + \lambda I$) = 1**, por que tenemos una matriz escalonada con *una sola fila* donde hay *números no nulos*.

(b)
Calcula la matriz X que verifica $CX - X = 2I$.

De $CX - X = 2I$, tenemos $(C - I)\cdot X = 2I$.

$$C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

La ecuación $CX - X = 2I$ se transforma en la ecuación $D\cdot X = 2I$.

Como $|D| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= -1(0+1) = -1 \neq 0$, la matriz D tiene matriz inversa $D^{-1} = (1/|D|)\cdot Adj(D^t)$.

Multiplicando la expresión $D\cdot X = 2I$ por la izquierda por la matriz D^{-1}, tenemos:
$D^{-1}DX = D^{-1}\cdot 2I \quad \rightarrow \quad I\cdot X = 2\cdot D^{-1}\cdot I \quad \rightarrow \quad X = 2\cdot D^{-1}$

$$D^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\ Adj(D^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ D^{-1} = (1/|D|).Adj(D^t) = (1/-1).\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego $\mathbf{X = 2\cdot D^{-1} =} 2\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 5 Septiembre 2016

[2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas dadas por las siguientes ecuaciones

$$x = y = z \qquad y \qquad \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = \quad -\mu \end{cases}$$

Solución

Calcula la distancia entre las rectas dadas dadas por las siguientes ecuaciones

$$r \equiv x = y = z \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = \quad -\mu \end{cases}$$

De "r" tenemos O(0,0,0) y **u** = (1,1,1)
De "s" tenemos A(1,3,0) y **v** = (1,1,-1). Observamos que los vectores no son proporcionales por tanto las rectas no son paralelas.
Calculamos la distancia entre las rectas, como la distancia de un punto de una recta, el O(0,0,0) a un plano que contiene a la otra y es paralelo a la primera

De "r" tenemos O(0,0,0) y **u** = (1,1,1)
De "s" tenemos A(1,3,0) y **v** = (1,1,-1).

El plano π que contiene a la recta "s" y es paralelo a la recta "r" tiene de ecuación:
det(**AX,v,u**) = 0

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-1)(1+1) - (y-3)(1+1) + (z)(1-1) = 2x - 2y + 4 = x - y + 2 = 0$$

$$d(r;s) = d(O;\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|(0) - (0) + 2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\ u^1.$$

También se puede tomar un punto genérico de "r" el X(a,a,a), otro de "s" el Y(1+μ,3+μ,-μ), formar el vector **XY** e imponerle la condición de perpendicularidad a la vez a las rectas "r" y "s" es decir **XY•u** = 0 y **XY•v** = 0. Obtenemos los puntos X e Y, que son los que están a la mínima distancia de la rectas "r" y "s", con lo cual d(r,s) = d(X,Y) = ||**XY**|| y sale $\sqrt{(2)}$ u^1.